التمرين الأول : (04 نقاط)

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

لتكن النقطة $A(-1;2;3)$ والمستقيم (Δ) الذي تمثيله الوسيطي : $\begin{cases} x = 9+4t \\ y = 6+t ; t \in \mathbb{R} \\ z = 2+2t \end{cases}$.

1 ـ أ)ـ أوجد معادلة ديكارتية للمستوي (P) العمودي على (Δ) والمار من A .

ب) ـ تحقق من أن النقطة $B(-3;3;-4)$ تنتمي إلى (Δ) .

جـ)ـ أحسب المسافة d_B بعد النقطة B عن المستوي (P) .

2ـ عبر عن المسافة d بين A والمستقيم (Δ) بدلالة d_B والمسافة AB ثم استنتج قيمة d .

3ـ لتكن M نقطة من المستقيم (Δ) . عبر عن AM^2 بدلالة t ثم أوجد قيمة d بطريقة ثانية.

التمرين الثاني : (04 نقاط)

(u_n) متتالية عددية معرفة على N كما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{4u_n} \end{cases}$

1- احسب u_2 , u_1

2- ا) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي nفإن : $0 \prec u_n \prec 4$

ب) بين أن (u_n) متزايدة , مادا تستنتج ؟

3.نعتبر المتتالية (v_n)المعرفة على N كما يلي : $v_n = \ln(u_n) - \ln 4$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية

ب) أكتب v_nو u_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{\to} u_n$

2) 4- احسب بدلالة n كلا من :و $S_n = v_0 + v_1 + ...v_n$ و $P_n = u_0 \times u_1 \times ....u_n$.

التمرين الثالث : (05 نقاط)

نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة C كثير الحدود $P(z)$ ذو المتغير المركب z حيث :

$$P(z) = z^3 + 2(\sqrt{2}-1)z^2 + 4(1-\sqrt{2})z - 8$$

1) أحسب $P(2)$ ثم أوجد تحليلا لـ $P(z)$.

2) حل في C المعادلة $P(z) = 0$ ، نسمي z_1 و z_2 الحلين المختلفين عن 2حيث z_1 جزؤه التخيلي موجب

3) أ/ تحقق أن : $z_1 + z_2 = -2\sqrt{2}$ ثم أكتب كل من z_1 و z_2 على الشكل الأسي .

4) في المستوي المركب المباشر المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u};\vec{v})$ (الوحدة $2cm$)
نعتبر النقط : A ، B ، C ذات اللواحق على الترتيب : 2 ، z_1 و z_2 ولتكن I منتصف $[AB]$

أ)ـ علم النقط A ، B ، C و I .

ب)ـ ما طبيعة المثلث OAB واستنتج قيسا للزاوية الموجهة $(\vec{u};\overrightarrow{OI})$.

جـ)ـ احسب z_I لاحقة I ثم اكتب z_I على الشكل الأسي .

د)ـ باستعمال النتائج السابقة أوجد القيم المضبوطة لكل من $\cos\frac{3\pi}{8}$ و $\sin\frac{3\pi}{8}$.

التمرين الرابع : (07نقط)

نعتبر الدالة f المعرفة على IR بـ : $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})$ و (c) تمثيلها في معلم متعامد ومتجانس

1. ا/ أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x, $f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$

ب/ أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

ج/ أدرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) والمستقيم (D)

2. أ/ بين انه من اجل كل عدد حقيقي x , $f(x)=-x+\ln(2+e^{2x})$

ب/ احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (D') الذي معادلته $y=-x+\ln 2$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C)

ج/ ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم (D')

3. ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها

4. ارسم (D) و (D') و (C)

5. نضع : $I=\int_2^3[f(x)-x]\,dx$

-1 فسر هندسيا العدد I

-2 بين أنه من اجل كل x من $[0,+\infty[$, $\ln(1+x)\le x$

-3 أستنتج أن $0\le I\le\int_2^3 2e^{-2x}dx$ واعط حصرا للعدد I سعته 0.02

Nafouz

التمرين الأول : (04 نقاط)

f دالة عددية معرفة على المجال $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

1) بين أنه إذا كان $x\succ 1$ فإن $f(x)\succ 1$.

2) نعرف المتتالية (u_n) بـ : $u_0=2$ ومن أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ/ برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $u_n\succ 1$.

ب/ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

جـ/ استنتج أن (u_n) متقاربة واستنتج نهايتها l .

3) لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على N بـ : $v_n=\ln(\frac{u_n-1}{u_n})$ حيث ln يرمز إلى اللوغاريتم النيبري.

أ/ أثبت أن (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب/ أكتب v_n بدلالة n واستنتج أن : $u_n=\frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{2^n}}$.

4) أحسب بدلالة n المجموع : $S_n=v_0+v_1+v_2+.........+v_n$.

<u>التمرين الثاني</u>: (05 نقاط)

I) نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : (E) .... $z^3+2z^2-16=0$.

1) أثبت أن العدد 2 حل للمعادلة (E)، ثم بين أنه يمكن كتابة (E) على الشكل $(z-2)(az^2+bz+c)=0$
حيث a ، b و c أعداد حقيقية يطلب حسابها .

2) استنتج حلول المعادلة (E) ثم اكتبها على الشكل الأسي .

II) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$ حيث الوحدة $1cm$.

1) انشئ النقط A ، B و C التي لواحقها على الترتيب : $z_A=-2-2i$ ، $z_B=2$ و $z_C=-2+2i$.

2) احسب z_D لاحقة النقطة D حتى يكون الرباعي $ABDC$ متوازي أضلاع .أنشئ النقطة D.

3) لتكن E صورة D بالدوران الذي مركزه B وزاويته $-\frac{\pi}{2}$ ولتكن F صورة D بالدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$.

أ/ أحسب z_E و z_F لاحقتي E و F .

ب/ أنشئ النقطتين E و F .

جـ/ تحقق من أن : $\frac{z_F-z_A}{z_E-z_A}=i$ ثم استنتج طبيعة المثلث AEF .

Nafouz

التمرين الثالث : (04 نقاط)

الفضاء (E) منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

نعتبر النقط: $A(0;4;1)$ ، $B(1;3;0)$ ، $C(2;-1;-2)$ و $D(7;-1;4)$.

1) أثبت أن النقط A ، B و C ليست في استقامية .

2) ليكن المستقيم (Δ) الذي يشمل النقطة D وشعاع توجيهه $\vec{u}(2;-1;3)$.

أ/ بين أن (Δ) عمودي على المستوي (ABC) .

ب/ استنتج معادلة ديكارتية للمستوي (ABC) .

جـ/ عين تمثيلا وسيطيا للمستقيم (Δ) .

د/ أوجد إحداثيات النقطة H نقطة تقاطع (Δ) و (ABC) .

3) نعتبر (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق : $x^2+y^2+z^2-2x-4y+10z+14=0$.

أ/ أثبت أن (S) كرة مركزها $\Omega(1;2;-5)$ ونصف قطرها $R=4$.

ب/ تحقق أن Ω تنتمي إلى (Δ).

جـ/ برهن أن المستوي (ABC) يقطع سطح الكرة (S) وفق دائرة (c) يطلب إيجاد إحداثيات مركزها ω ونصف قطرها r .

التمرين الرابع : (07 نقاط)

I) لتكن الدالة g المعرفة على R بـ : $g(x)=e^x+2-x$.

1• أحسب نهايات الدالة g عند حدود مجال التعريف .

2• ادرس اتجاه تغير الدالة g وشكل جدول تغيراتها .

3• استنتج إشارة $g(x)$.

II) نعتبر الدالة f المعرفة على R بـ : $f(x)=x+(x-1)e^{-x}$ ، (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1• بين أنه من أجل كل x من R فإن : $f'(x)=e^{-x}g(x)$ واستنتج اتجاه تغير f .

2• احسب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

3• شكل جدول تغيرات الدالة f .

4• بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل في R حلا وحيدا α حيث : $0 \prec \alpha \prec \frac{1}{2}$.

5• أ/ أثبت أن المستقيم (D) ذا المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$.

ب/ أدرس الوضع النسبي لـ(C) و (D) .

6• احسب $f(-\frac{1}{2})$ و $f(-1)$ ثم أنشئ (C) و (D) .

III) لتكن الدالة F المعرفة على R بـ : $F(x)=\frac{1}{2}x^2-xe^{-x}$.

1• أثبت أن الدالة F هي دالة أصلية للدالة f على R.

2• نرمز بـ $A(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل والمستقيمين : $x=\alpha$ و $x=1$

احسب $A(\alpha)$.

التمرين الأول(4 نقاط)

$A(-1,2,3)$ و $(\Delta):\begin{cases}x=9+4t\\ y=6+t.....t\in\Re\\ z=2+2t\end{cases}$

1)أ) إيجاد معادلة المستوى (P) : لدينا $(\Delta)\perp(P)$ ومنه

$\vec{u}_\Delta(4;1;2)$ شعاع توجيه (Δ) ناظمي للمستوي (P) 1

معادلته: $4x+y+2z+d=0$

$A(-1,2,3)\in(P)$ أي: $-4+2+6+d=0$ أي: $d=-4$

$\boxed{(P):4x+y+2z-4=0}$

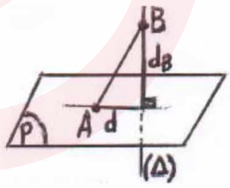
ب) التحقق أن $B(-3,3,-4)$ **تنتمي إلى** (Δ) : 0.5

$(\Delta):\begin{cases}-3=9+4t\\ 3=6+t\\ -4=2+2t\end{cases}$ ومنه: $\begin{cases}t=-3\\ t=-3\\ t=-3\end{cases}$ وحيدة t ، $B\in(\Delta)$

ج)حساب المسافة d_B **بين** B و (P) : 0.5

لدينا: $d_B=\frac{|-12+3-8-4|}{\sqrt{4^2+1^2+2^2}}=\frac{21}{\sqrt{21}}=\frac{21\sqrt{21}}{21}=\sqrt{21}$

2)حساب المسافة d **بين** A و (Δ):



$AB^2=d^2+d_B^2$

$d^2=AB^2-d_B^2$

$\boxed{d=\sqrt{AB^2-d_B^2}}$ 0.5

$AB=\sqrt{(-3+1)^2+(3-2)^2+(-4-3)^2}=\sqrt{54}$

$d=\sqrt{54-21}$ نجد $\boxed{d=\sqrt{33}}$ 0.5

3)التعبير عن AM^2 **بدلالة** t:

$M\in(\Delta)$ ومنه $M(9+4t;6+t;2+2t)$

$AM=\sqrt{(9+4t+1)^2+(6+t-2)^2+(2+2t-3)^2}$

$AM=\sqrt{(4t+10)^2+(t+4)^2+(2t-1)^2}$

$AM=\sqrt{16t^2+80t+100+t^2+8t+16+4t^2-4t+1}$

$AM=\sqrt{21t^2+84t+117}$ 0.5

$\boxed{AM^2=21t^2+84t+117}$

نضع: $f(t)=21t^2+84t+117$

لندرس اتجاه تغير f : $f'(t)=42t+84$

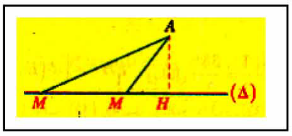
$42t+84=0$ **نجد** $t=-2$

t	$-\infty$	**-2**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$+\infty$ ↘	**33**	↗ $+\infty$

من أجل $t=-2$ الطول AM أصغر ما يمكن

$AM^2=f(-2)=33$ 0.5

ومنه $AM=\sqrt{33}$: $d=\sqrt{33}$



التمرين الثاني (4 نقاط)

$\begin{cases}U_0=1\\ U_{n+1}=\sqrt{4U_n}\end{cases}$

1)حساب u_2,u_1:

$U_1=\sqrt{4U_0}=\sqrt{4}=2$ 0.5

$U_2=\sqrt{4U_1}=\sqrt{8}$

2) أ) البرهان أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\prec U_n\prec 4$

*** من اجل** $n=0$: $0\prec U_0=1\prec 4$ ($P(0)$ **محققة**)

***نفرض أن** $0\prec U_n\prec 4$ **صحيحة و نبين أن:** $0\prec U_{n+1}\prec 4$

لدينا : $0\prec U_n\prec 4$ **ومنه:** $0\prec 4U_n\prec 16$

إذن: $\sqrt{0}\prec\sqrt{4U_n}\prec\sqrt{16}$ 0.5

وبالتالي: $0\prec U_{n+1}\prec 4$

إذن $p(n+1)$ **صحيحة**

***الاستنتاج : من أجل كل** $n\in\mathbb{N}$: $0\prec U_n\prec 4$

ب) اتجاه تغير المتتالية (U_n)

$U_{n+1}-U_n=\sqrt{4U_n}-U_n$

$U_{n+1}-U_n=\frac{(\sqrt{4U_n}-U_n)(\sqrt{4U_n}+U_n)}{\sqrt{4U_n}+U_n}$

$U_{n+1}-U_n=\frac{4U_n-U_n^2}{\sqrt{4U_n}+U_n}=\frac{U_n(4-U_n)}{\sqrt{4U_n}+U_n}$

لدينا : $U_n\prec 4$ **ومنه:** $4-U_n\succ 0$ 0.5

و لدينا : $U_n\succ 0$ **ومنه:** $\sqrt{4U_n}+U_n\succ 0$

ومنه: $U_{n+1}-U_n\succ 0$ **إذن :** (U_n) **متزايدة** 0.25

الاستنتاج: (U_n) **متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة**

3) أ) إثبات أن (V_n) **متتالية هندسية:** $V_n=\ln(U_n)-\ln 4$

لدينا : $V_{n+1}=\ln(U_{n+1})-\ln 4$

$V_{n+1}=\ln(\sqrt{4U_n})-\ln 4$

$\boxed{\begin{matrix}\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a\\ a\succ 0\end{matrix}}$

$V_{n+1}=\frac{1}{2}\ln(4U_n)-\ln 4$

$\boxed{\begin{matrix}\ln ab=\ln a+\ln b\\ a\succ 0,b\succ 0\end{matrix}}$

$V_{n+1}=\frac{1}{2}\ln 4+\frac{1}{2}\ln(U_n)-\ln 4$

$V_{n+1}=\frac{1}{2}\ln(U_n)-\frac{1}{2}\ln 4$

$V_{n+1}=\frac{1}{2}[\ln(U_n)-\ln 4]$

$\boxed{V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n}$ (V_n) **هندسية أساسها** $q=\frac{1}{2}$ 0.5

و حدها الأول $V_0=\ln(U_0)-\ln 4$ **نجد** $\boxed{V_0=-\ln 4}$

ب) عبارة V_n :

$V_n = V_0 \times q^n$

0.25 $\boxed{V_n = (-\ln 4)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

عبارة U_n :

$V_n = \ln(U_n) - \ln 4$

نجد $\ln(U_n) = V_n + \ln 4$

$U_n = e^{(v_n+\ln 4)}$

$U_n = e^{v_n}\times e^{\ln 4}$

0.25

$U_n = 4e^{-(\ln 4)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$ 0.25

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 4}$ (لأن : $-1 \prec \frac{1}{2} \prec 1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$)

4) حساب: $S_n = V_0+V_1+....+V_n$

نجد $S_n = V_0\left[\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right]$

$S_n = (-\ln 4)\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right]$

$S_n = (-2\ln 4)\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$

0.5

$S_n = 4(\ln 2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]$

حساب: $P_n = U_0\times U_1\times ....\times U_n$

لدينا: $U_n = e^{(v_n+\ln 4)}$

$P_n = e^{v_0+\ln 4}\times e^{v_1+\ln 4}\times......\times e^{v_n+\ln 4}$

$P_n = e^{(v_0+v_1+.....v_n)+\underbrace{(\ln 4+\ln 4+...+\ln 4)}_{(n+1)\text{ حد}}}$

$P_n = e^{(S_n)+(n+1)\ln 4}$ 0.5

$P_n = e^{4(\ln 2)\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-1\right]+(n+1)\ln 4}$

التمرين الثالث(5نقاط)

$P(Z)=Z^3+2(\sqrt{2}-1)Z^2+4(1-\sqrt{2})Z-8$

1) $P(2)=0$ 0.25

$P(Z)=(Z-2)(aZ^2+bZ+c)$

$P(Z)=aZ^3+bZ^2+cZ-2aZ^2-2bZ-2c$

$P(Z)=aZ^3+(b-2a)Z^2+(c-2b)Z-2c$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases}a=1\\ b-2a=2\sqrt{2}-2\\ c-2b=4-4\sqrt{2}\\ -2c=-8\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}a=1\\ b=2\sqrt{2}\\ c=4\end{cases}$

0.5 $\boxed{P(Z)=(Z-2)(Z^2+2\sqrt{2}Z+4)}$

2) $P(Z)=0$

$Z=2$ أو $Z^2+2\sqrt{2}Z+4=0$

$\Delta=-8\Rightarrow\sqrt{\Delta}=i(2\sqrt{2})$

$Z=\frac{-2\sqrt{2}+i(2\sqrt{2})}{2}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ أو $Z=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

$\boxed{Z_1=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i}$ و $\boxed{Z_2=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i}$ 0.5

3) $Z_1+Z_2=-2\sqrt{2}$ 0.25

الشكل الأسي:

$Z_1=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

$|Z_1|=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+\sqrt{2}^2}=\sqrt{4}=2$

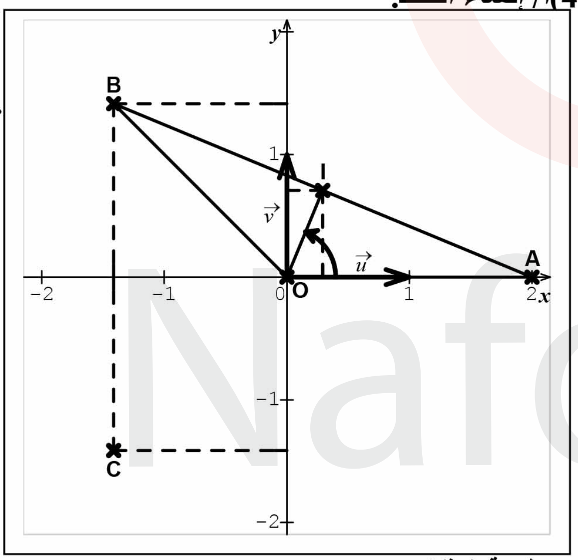
$\begin{cases}\cos\theta=\frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ و $\theta=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$ إذن $\boxed{Z_1=2e^{i\frac{3\pi}{4}}}$ 0.5

$Z_2=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$

$|Z_2|=\sqrt{4}=2$

$\begin{cases}\cos\alpha=\frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \sin\alpha=\frac{-\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ و $\alpha=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$ إذن $\boxed{Z_2=2e^{i\frac{5\pi}{4}}}$ 0.5

4)أ/ إنشاء النقط: 0.5



ب) طبيعة المثلث OAB :

لدينا: $|Z_A|=|Z_B|=2$ نجد $OB=OA=2$ 0.25

OAB متقايس الضلعين

قيس $(\vec{U};\vec{OI})$: $\frac{Z_B}{Z_A}=\frac{2e^{\frac{3\pi}{4}i}}{2}=e^{\frac{3\pi}{4}i}$

$\arg\left(\frac{Z_B}{Z_A}\right)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$ نجد $(\vec{OA};\vec{OB})=\frac{3\pi}{4}$

0.5 $(\vec{U};\vec{OI})=\frac{(\vec{OA};\vec{OB})}{2}=\frac{3\pi}{8}$

لأن ($[OI]$ منصف الزاوية $(\vec{OA};\vec{OB})$)

ج)**حساب** Z_I **لاحقة** I منتصف $[AB]$:

$$Z_I=\frac{Z_A+Z_B}{2}=\frac{2-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$$

0.5

$$Z_I=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

كتابة Z_I **على الشكل الأسي:**

$$|Z_I|=\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$|Z_I|=\sqrt{\frac{8-4\sqrt{2}}{4}}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

$$\arg(Z_I)=(\vec{U};\vec{OI})=\frac{3\pi}{8}$$

0.5

$$Z_I=\sqrt{2-\sqrt{2}}\,e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

استنتاج القيمة المضبوطة $\sin\frac{3\pi}{8}$ و.. $\cos\frac{3\pi}{8}$:

$$Z_I=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$Z_I=\sqrt{2-\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}\sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}\\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ \sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{2-\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2(2+\sqrt{2})}{2}}\end{cases}$$

0.5

$$\begin{cases}\cos\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\\ \sin\frac{3\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\end{cases}$$

التمرين الرابع:7نقاط

$D_f=\Re$ ، $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})$

1) أ) **إثبات أن** : $f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$ 0.5

لدينا: $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})=\ln\left(e^x(1+2e^{-2x})\right)$

$$f(x)=\ln(e^x)+\ln(1+2e^{-2x})$$

$$f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$$

ب) **حساب** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$: 0.25

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+\ln(1+2e^{-2x}))=+\infty$$

إثبات أن $(D): y=x$ **مقارب مائل لـ** (C_f) 0.5

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}(\ln(1+2e^{-2x}))=0$$

ومنه (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

ج)**دراسة الوضع النسبي** (C_f) و (D):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-x=\ln(1+2e^{-2x})$ 0.25

$1+2e^{-2x}\succ 1$ لأن $(2e^{-2x}\succ 0)$ ومنه $\ln(1+2e^{-2x})\succ 0$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
إشارة الفرق	$+$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (D)

2) أ) **إثبات أن** : $f(x)=-x+\ln(2+e^{2x})$

لدينا: $f(x)=\ln(e^x+2e^{-x})=\ln\left(e^{-x}(e^{2x}+2)\right)$

0.5

$$f(x)=\ln(e^{-x})+\ln(2+e^{2x})$$

$$f(x)=-x+\ln(2+e^{2x})$$

ب) **حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$: 0.25

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}(-x+\ln(2+e^{2x}))=+\infty$$

إثبات أن $(D'): y=-x+\ln 2$ **مقارب مائل لـ** (C_f)

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(-x+\ln 2)]=\lim_{x\to-\infty}(-x+\ln(2+e^{2x})+x-\ln 2)$$

0.5

$$=\lim_{x\to-\infty}(\ln(2+e^{2x})-\ln 2)=\ln 2-\ln 2=0$$

ومنه (D') مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

ج)**دراسة الوضع النسبي** (C_f) و (D'):

ندرس إشارة الفرق

$$f(x)-(-x+\ln 2)=\ln(2+e^{2x})-\ln 2$$

$$f(x)-(-x+\ln 2)=\ln\left(\frac{2+e^{2x}}{2}\right)$$

0.25

$$f(x)-(-x+\ln 2)=\ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right)$$

$1+\frac{1}{2}e^{2x}\succ 1$ لأن $\left(\frac{1}{2}e^{2x}\succ 0\right)$ ومنه $\ln\left(1+\frac{1}{2}e^{2x}\right)\succ 0$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
إشارة الفرق	$+$
الوضع النسبي	(C_f) فوق (D')

3)**حساب المشتق:**

0.5

$$f'(x)=\frac{e^x-2e^{-x}}{e^x+2e^{-x}}$$

ومنه

$$f'(x)=\frac{e^{-x}(e^{2x}-2)}{e^x+2e^{-x}}$$

إشارة المشتق:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $e^{2x}-2$

لأن ($e^{-x}\succ 0$ و $e^{x}+2e^{-x}\succ 0$)

$e^{2x}-2\ge 0$ نجد $e^{2x}\ge 2$

$2x\ge \ln 2$ نجد $x\ge \frac{\ln 2}{2}$

وبنفس الطريقة: $e^{2x}-2\le 0$ نجد $x\le \frac{\ln 2}{2}$ 0.5

x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

f متناقصة على $\left]-\infty;\frac{\ln 2}{2}\right]$ ومتزايدة على $\left[\frac{\ln 2}{2};+\infty\right[$

2) جدول تغيرات f : 0.5

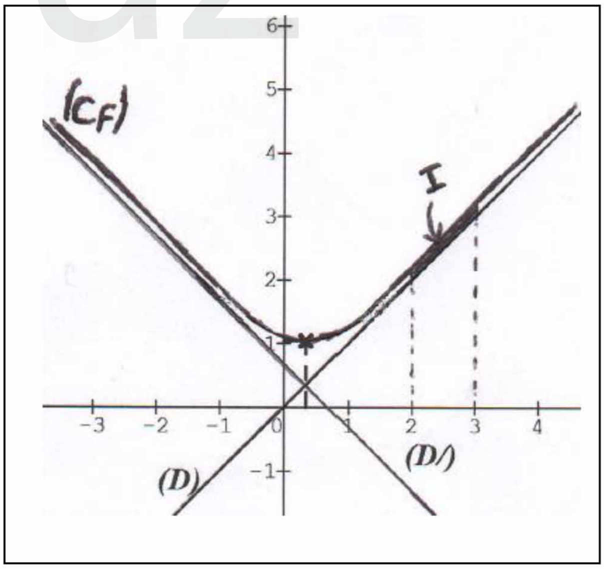
x	$-\infty$	$\frac{\ln 2}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{3\ln 2}{2}$	↗ $+\infty$

$$f(x)=x+\ln(1+2e^{-2x})$$

$$f\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{\ln 2}{2}+\ln(1+2e^{-\ln 2})=\frac{\ln 2}{2}+\ln 2$$

$$f\left(\frac{\ln 2}{2}\right)=\frac{3\ln 2}{2}$$

4) رسم : (C_f) ، (D) ، (D') 0.75



5) نضع: $I=\int_2^3 (f(x)-x)dx$:

1) I المساحة المحددة بالمنحني (C_f) والمستقيمات $x=2$ و $x=3$ و $(D): y=x$ 0.25

2) **إثبات أنه من أجل** $x\in[0;+\infty[$: $\ln(1+x)\le x$:

نضع : $g(x)=\ln(1+x)-x$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$$

لدينا من أجل $x\ge 0$: $g'(x)\le 0$

g متناقصة على المجال $[0;+\infty[$ (فهي تعكس الترتيب)

من أجل $x\ge 0$: $g(x)\le g(0)$ ولدينا $g(0)=0$

$$\ln(1+x)-x\le 0$$

$$\ln(1+x)\le x$$ 0.5

3) **إستنتاج أن** $0\le I\le \int_2^3 2e^{-2x}dx$:

لدينا: $I=\int_2^3 (f(x)-x)dx=\int_2^3 (x+\ln(1+2e^{-2x})-x)dx$

$$I=\int_2^3 \ln(1+2e^{-2x})dx$$

$1+2e^{-2x}\succ 1$ ومنه $\ln(1+2e^{-2x})\succ 0$

ومنه $\int_2^3 \ln(1+2e^{-2x})dx\ge 0$ إذن $(1).....I\ge 0$

لدينا $2e^{-2x}\succ 0$ حسب السؤال السابق $\ln(1+2e^{-2x})\le 2e^{-2x}$

ومنه $\int_2^3 \ln(1+2e^{-2x})dx\le \int_2^3 2e^{-2x}dx$

إذن $(2)....I\le \int_2^3 2e^{-2x}dx$

من (1) و (2) نجد $0\le I\le \int_2^3 2e^{-2x}dx$ 0.75

إيجاد حصرا للعدد I سعته 0,02 : $0\le I\le \int_2^3 2e^{-2x}dx$

لدينا: $\int_2^3 2e^{-2x}dx=\left[-e^{-2x}\right]_2^3=-e^{-6}+e^{-4}\approx 0.01583...$

ومنه: $0\le I\le (e^{-4}-e^{-6})$

$0\le I\le 0,02$ 0.25